

VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DE UM MODELO TEÓRICO DE UMA VIGA METÁLICA LIVRE-LIVRE

Fábio Xavier de Melo¹

RESUMO

Este trabalho propõe um modelo teórico para a vibração transversal de uma viga livre-livre que foi submetida a um ensaio de vibração. O principal objetivo deste trabalho é realizar a modelagem de uma viga livre-livre, com a finalidade de comparar resultados numéricos e experimentais para frequências naturais, modos de vibrar e respostas em frequência. Desta forma, partindo-se do modelo de uma viga contínua, obtêm-se as equações de movimento considerando o modelo de Euler-Bernoulli. O caso de vibração livre é estudado para a determinação dos quatro primeiros modos de vibrar da viga. As Funções Resposta em Frequência (FRF) são obtidas a partir do estudo da vibração forçada. O modelo proposto mostrou-se eficiente na obtenção das frequências naturais de vibração e das Funções de Resposta em Frequência da viga e apresentando boa concordância com os resultados experimentais.

Palavras-chave: FRF, viga livre-livre, vibrações, sistemas contínuos.

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas mecânicos que possuem massas e rigidez distribuídas, tais como cabos, hastes, vigas, placas, etc., ao invés de agrupadas por molas em massas concentradas pertencem à classe de vibração de meios contínuos (CRAIG, 1981).

Estes sistemas consistem em um número infinitamente grande de partículas e, portanto, requerem um número infinitamente grande de coordenadas para especificar suas configurações. Consequentemente, sistemas mecânicos desta classe têm um número infinito de frequências naturais e modos naturais de vibração.

Em geral, vibrações de meios contínuos são comandadas por equações diferenciais parciais e em sua análise, admitimos que todos os materiais são homogêneos e isotrópicos e que obedecem à lei de Hooke.

2 VIBRAÇÃO TRANSVERSAL DE VIGAS: MODELO DE EULER-BERNOULLI

Considere o diagrama de corpo livre de uma viga metálica, conforme ilustrado na Figura 1, no qual $M(x,t)$ corresponde ao momento fletor, $V(x,t)$ a força de cisalhamento e $f(x,t)$ é uma força externa por unidade de comprimento aplicada a viga (INMAN, 1996).

¹ Vínculo institucional: Professor na Brazcubas Educação. Engenheiro Físico UFSCar (2010), especialista em Engenharia de Segurança do Trabalho, mestre e doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade de São Paulo (2017). Atualmente é professor de pós-graduação em Engenharia de Segurança do Trabalho no Centro Universitário das Faculdades Metropolitanas Unidas, professor ingressante A da Universidade Braz Cubas. e-mail: eng_fabio_xavier@hotmail.com.

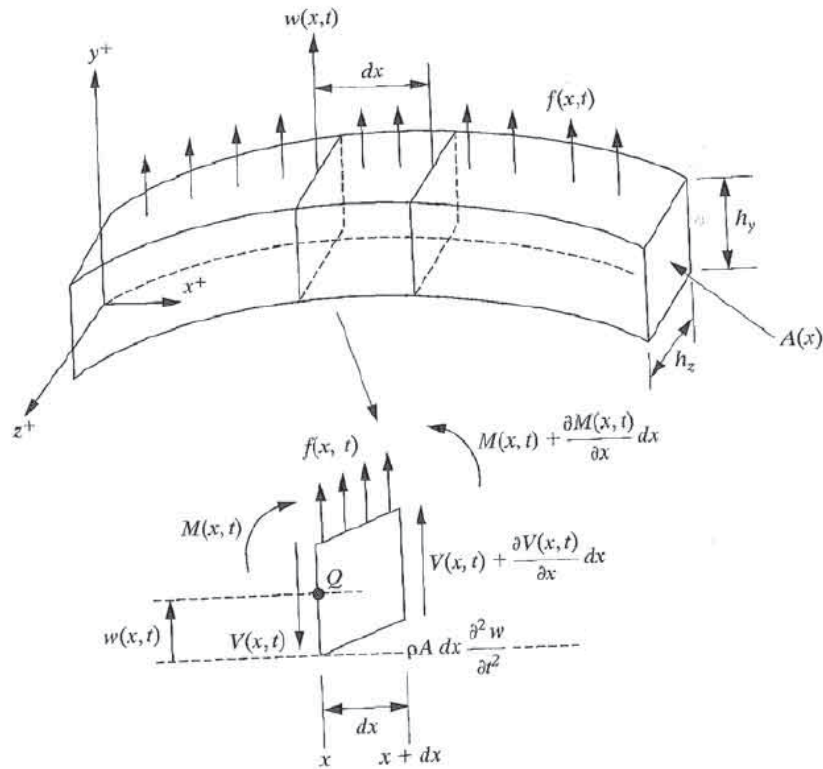


Figura 1: Diagrama de corpo livre de uma viga.

A força de inércia atuante na viga é expressa por:

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

Portanto, a equação de movimento na direção z é dada por:

$$-(V + dV) + f(x,t)dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

Sendo ρ a densidade do material do qual a viga é feita, $A(x)$ é a área da seção transversal da viga. A equação de movimento em relação ao eixo y é dada por:

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x,t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (3)$$

Sendo que dV e dM podem ser reescritos da seguinte forma:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad (4)$$

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad (5)$$

Substituindo-se as equações (4) e (5) respectivamente nas equações (2) e (3) e desprezando-se os termos de segunda ordem em dx obtém-se:

$$-\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = V(x,t) \quad (7)$$

Substituindo-se a equação (7) na equação (6) obtém-se:

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (8)$$

Pela teoria de Euler-Bernoulli a relação entre o momento fletor e a deflexão da viga é dada por:

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (9)$$

Na qual, E é o módulo de Young e $I(x)$ é o momento de inércia da viga em relação ao eixo y . Substituindo-se a equação (9) na equação (8) obtém-se a equação de movimento para vibração transversal forçada de uma viga não uniforme, dada pela equação (10).

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (10)$$

Considerando-se vibração livre e a viga como sendo uniforme a equação (10) pode ser simplificada da seguinte forma:

$$c^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

Sendo que:

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (12)$$

Uma vez que a equação diferencial obtida apresenta uma derivada de segunda ordem com relação ao tempo e uma derivada de quarta ordem com relação a coordenada x , a solução do problema é obtida por meio da aplicação de duas condições iniciais e de quatro condições de contorno. A equação (11) é uma equação diferencial parcial linear e homogênea que pode ser solucionada empregando-se a técnica da separação de variáveis.

Supondo uma solução para equação (11) do tipo:

$$w(x,t) = W(x)T(t) \quad (13)$$

Substituindo-se a equação (13) na equação (11) obtém-se:

$$c^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} [W(x)T(t)] + \frac{\partial^2}{\partial t^2} [W(x)T(t)] = 0 \quad (14)$$

Como as funções $W(x)$ e $T(t)$ dependem somente da posição e do tempo respectivamente, as derivadas parciais devem ser trocadas por derivadas simples.

$$c^2 T(t) \frac{d^4 W(x)}{dx^4} + W(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0 \quad (15)$$

Dividindo-se a equação (15) por $W(x) T(t)$, tem-se:

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} + \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0 \quad (16)$$

Que pode ser escrita como:

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = - \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \quad (17)$$

Como o lado direito da equação anterior depende somente de x e o lado esquerdo somente de t . Isso só pode ser verdade se ambas forem uma constante positiva, que convenientemente é chamada de ω^2 .

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = - \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \text{constante} = \omega^2 \quad (18)$$

A separação de variáveis aplicada na equação (11) resulta nas seguintes equações:

$$\frac{d^4W(x)}{dx^4} - \beta^4W(x) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d^2T(x)}{dt^2} + \omega^2T(x) = 0 \quad (20)$$

Sendo que:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \rho \frac{A\omega^2}{EI} \quad (21)$$

Do ponto de vista matemático, a equação (20) é idêntica a equação de um oscilador harmônico cuja solução é dada por:

$$T(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t \quad (22)$$

A equação (19) é resolvida supondo-se uma solução do tipo:

$$W(x) = D e^{sx} \quad (23)$$

Com D e s constantes. Substituindo-se a equação (23) na equação (19) obtém-se:

$$s^4 - \beta^4 = 0 \quad (24)$$

Cujas raízes são:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \pm \beta \\ s_{3,4} &= \pm j\beta \end{aligned} \quad (25)$$

Que resulta na seguinte solução:

$$W(x) = D_1 e^{s\beta} + D_2 e^{-s\beta} + D_3 e^{js\beta} + D_4 e^{-js\beta} \quad (26)$$

A equação (26) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$W(x) = A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x) + A_3 \cosh(\beta x) + A_4 \sinh(\beta x) \quad (27)$$

Com as constantes A_1 , A_2 , A_3 e A_4 determinadas pelas condições de contorno do problema.

Para uma viga livre-livre de comprimento l temos as seguintes condições de contorno para o momento fletor e força de cisalhamento:

$$\begin{aligned}
 EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= 0 \\
 EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=l} &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \right) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=l} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{28}$$

Aplicando-se estas condições de contorno obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix}
 -\beta^2 & 0 & \beta^2 & 0 \\
 0 & -\beta^3 & 0 & \beta^3 \\
 -\beta^2 \cos(\beta l) & -\beta^2 \sin(\beta l) & \beta^2 \cosh(\beta l) & \beta^2 \sinh(\beta l) \\
 \beta^3 \sin(\beta l) & -\beta^3 \cos(\beta l) & \beta^3 \sinh(\beta l) & \beta^3 \cosh(\beta l)
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 A_1 \\
 A_2 \\
 A_3 \\
 A_4
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix} \tag{29}$$

Para este sistema de equações possuir solução não trivial, o determinante da matriz quadrada deve ser igual a zero. Isso implica na seguinte equação característica:

$$\cosh(\beta l) \cos(\beta l) = 1 \tag{30}$$

As raízes da equação (30) são os autovalores β_n multiplicados pelo comprimento l da viga. A solução desta equação pode ser obtida numericamente e os quatro primeiros valores são listados abaixo:

$$\begin{aligned}
 \beta_0 l &= 0 \\
 \beta_1 l &= 4,730041 \\
 \beta_2 l &= 7,853205 \\
 \beta_3 l &= 10,995608 \\
 \beta_4 l &= 14,137165 \\
 \beta_5 l &= 17,2787597
 \end{aligned} \tag{31}$$

Das duas primeiras equações do sistema tem-se:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_3 \\ A_2 &= A_4 \end{aligned} \quad (32)$$

Combinando as duas relações acima com a terceira equação, tem-se:

$$-\beta^2 A_1 \cos(\beta l) - \beta^2 A_2 \operatorname{sen}(\beta l) + \beta^2 A_3 \cosh(\beta l) + \beta^2 A_4 \operatorname{senh}(\beta l) = 0 \quad (33)$$

$$A_1 = -A_2 \left[\frac{\operatorname{senh}(\beta l) - \operatorname{sen}(\beta l)}{\cosh(\beta l) - \cos(\beta l)} \right] = -\alpha A_2 \quad (34)$$

Substituindo-se os valores encontrados para as constantes na equação (27), tem-se a seguinte equação, que representa os modos de vibrar da viga:

$$W(x) = A \left[\operatorname{sen}(\beta x) + \operatorname{senh}(\beta x) + \alpha \left[\cos(\beta x) + \cosh(\beta x) \right] \right] \quad (35)$$

Na qual:

$$\alpha = \left[\frac{\operatorname{senh}(\beta l) - \operatorname{sen}(\beta l)}{\cosh(\beta l) - \cos(\beta l)} \right] \quad (36)$$

Diferentemente da vibração livre, quando se estuda uma vibração forçada é necessário especificar as condições de ortogonalidade para o sistema estudado. Neste caso, as condições de ortogonalidade são dadas por:

Massa modal:

$$m_p = \int_0^L \rho W^2(x) dx \quad (37)$$

Rigidez modal:

$$k_p = m_p \cdot \omega_p^2 \quad (38)$$

Uma vez, estabelecidas as condições de ortogonalidade, a função de resposta em frequência para vibração forçada é expressa por:

$$H_{ab}(\omega) = -\omega^2 \sum_{p=1}^N \frac{U_p(a)U_p(b)}{k_p - m_p \omega^2 + j c_p \omega}$$

(39)

Na qual: a é localização na qual se mede a resposta do sistema, e b a localização da entrada da força (MCCONNELL & VAROTO,2009).

3 PROPRIEDADES FÍSICAS, CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DA VIGA E PROCEDIMENTO DE ENSAIO

A tabela a seguir apresenta as propriedades físicas e as características geométricas da viga ensaiada que são necessárias para construção e validação do modelo teórico.

Tabela 1: Propriedades físicas e características geométricas da viga ensaiada.

Propriedades físicas e características geométricas	Valores
Densidade [kg/m ³]	7860
Módulo de Young [N/m ²]	200,10 ⁹
Largura [m]	0,0254
Espessura [m]	0,009525
Comprimento [m]	0,6565

Para realização do ensaio foram utilizados os seguintes componentes: *shaker*, amplificador de potencia, cabos BNC, transdutor de força, amplificador de carga, acelerômetro e um microcomputador. Os ensaios foram realizados utilizando-se uma excitação do tipo pseudo-aleatória, varrendo um intervalo de frequências de 0 a 1500 Hz.

As medições foram feitas através da aplicação da excitação em um dos quatro pontos ilustrados na Figura 2 e da medição das respostas nos demais pontos, inclusive no ponto de excitação. Excitou-se a viga no ponto 1 e mediu-se as repostas nos pontos 1, 2 ,3 e 4. O mesmo procedimento foi realizado excitando-se a viga nos pontos 2 e 3. Como resultado foi gerado um conjunto de dados a partir do qual foi possível obter os

gráficos de excitação, resposta e as FRF de todas as condições de ensaio. Estes dados foram utilizados para validar o modelo teórico.

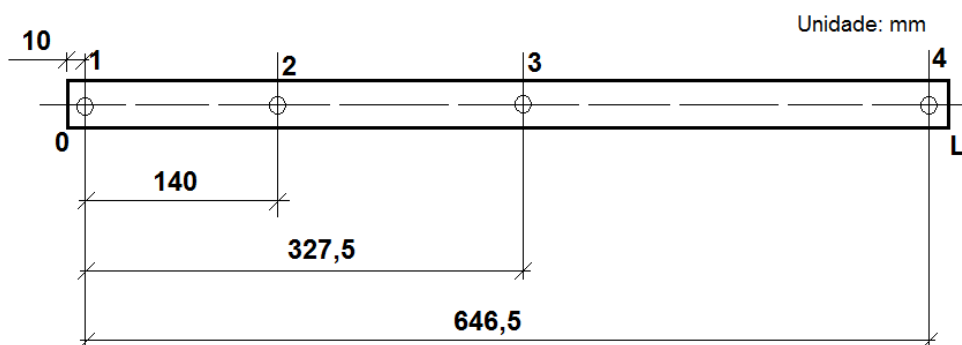


Figura 2: Viga ensaiada

4 RESULTADOS TEÓRICOS, EXPERIMENTAIS E VALIDAÇÃO DO MODELO

Da construção do modelo teórico foi possível obter expressões para calcular os modos normais de vibração da viga e as frequências naturais não amortecidas de cada um destes modos.

Através da equação (35) juntamente com a equação (31) obteve-se os cinco primeiros modos normais de vibração da viga ensaiada. O resultado está ilustrado na Figura 3.

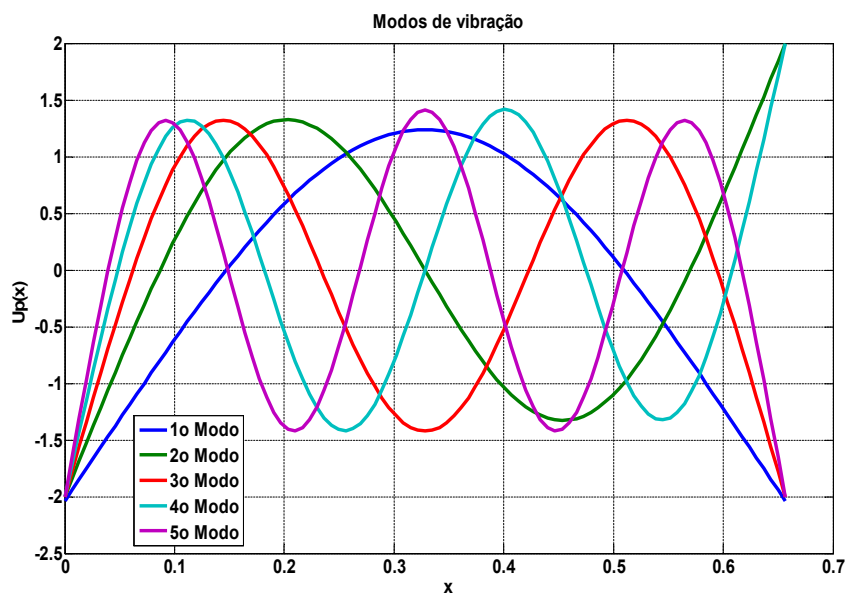


Figura 3: Cinco primeiros modos de vibração da viga ensaiada.

Os resultados teóricos para as frequências naturais obtidos através da expressão

$\omega^2 = \beta^4 \frac{EI}{\rho A}$, deduzida anteriormente, convertidos para valores de frequência em hertz foram os seguintes:

$$f_{1T} = 114,29$$

$$f_{2T} = 315,05$$

$$f_{3T} = 617,63$$

$$f_{4T} = 1021$$

$$f_{5T} = 1525$$

Para comparar estes valores teóricos de frequências naturais dos cinco primeiros modos normais de vibração da viga, utilizou-se o gráfico da FRF H11 obtido experimentalmente, Figura 4, do qual obteve-se os valores das frequências naturais amortecidas da viga que são:

$$f_{1E} = 112,5$$

$$f_{2E} = 310,3$$

$$f_{3E} = 605,6$$

$$f_{4E} = 1000$$

$$f_{5E} = 1483$$

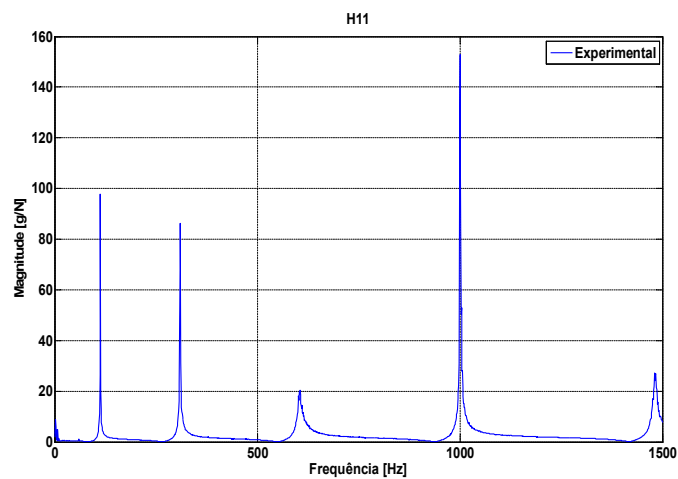


Figura 4: Função de Resposta em Frequência H11

Verifica-se que os valores teóricos obtidos para as frequências naturais da viga estão bem próximos dos valores obtidos experimentalmente, porém, são inferiores a estes. Isso pode ser explicado pelo fato de que as frequências calculadas teoricamente não levam em consideração o amortecimento. Mesmo assim, os valores obtidos estão validados, uma vez que, o erro da estimação é de 2,8%.

A Figura 5 apresenta o gráfico da Função de Resposta em Frequência H11 obtida experimentalmente na condição de ensaio em que a viga é excitada no ponto 1 e a resposta é medida no ponto 1.

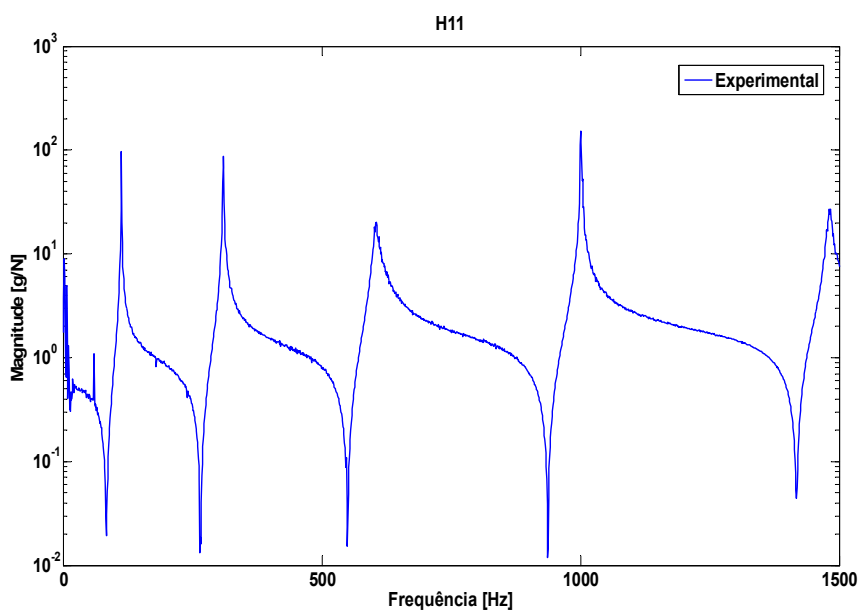


Figura 5: Função de Resposta em Frequência (H11) experimental.

A Figura 6 apresenta o gráfico da Função de Resposta em Frequência H11 obtida através do modelo teórico, simulando a condição de ensaio em que a viga é excitada no ponto 1 e a resposta é medida no ponto 1.

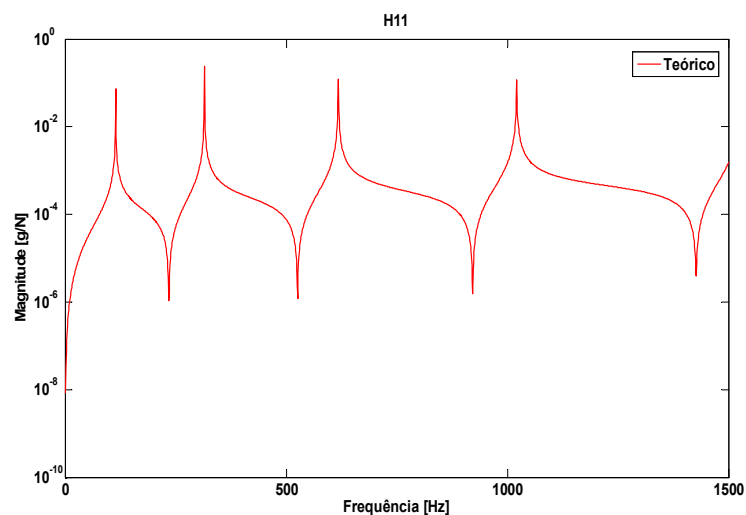


Figura 6: Função de Resposta em Frequência (H11) teórica

A Figura 7 apresenta a comparação entre os resultados obtidos teoricamente e experimentalmente. Analisando-se qualitativamente a Figura 7 observa-se que o modelo teórico apresenta uma boa concordância com o resultado experimental, uma vez que, as frequências dos picos estão bem próximas.

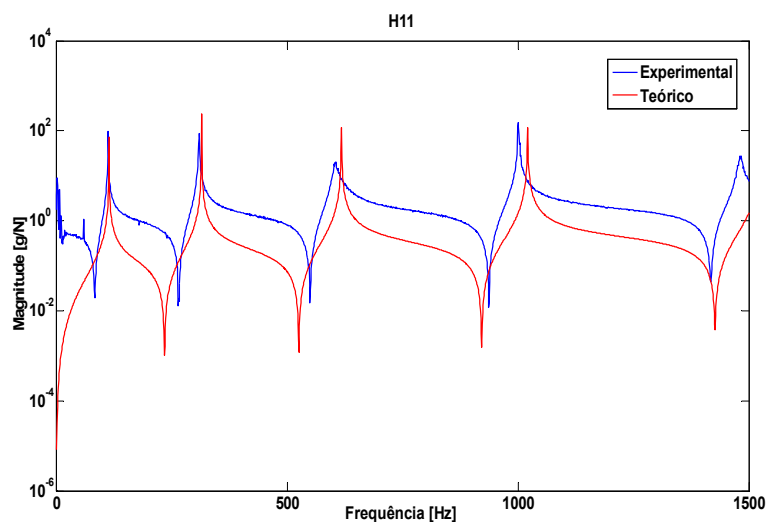


Figura 7: Comparação entre H11 teórica e H11 experimental

A Tabela 2 apresenta os valores das frequências de pico, f_p , presentes nas FRF H11 teórica e experimental e o erro de estimação do modelo teórico.

Tabela 2: Comparação entre as frequências de pico para H11.

f_p Experimental [Hz]	f_p Teórica [Hz]	Erro [%]
112,5	114,4	1,68
310,3	315	1,51
605,6	617,8	2,01
1000	1021	2,1

A Figura 8 apresenta o gráfico da Função de Resposta em Frequência H22 obtida experimentalmente na condição de ensaio em que a viga é excitada no ponto 2 e a resposta é medida no ponto 2.

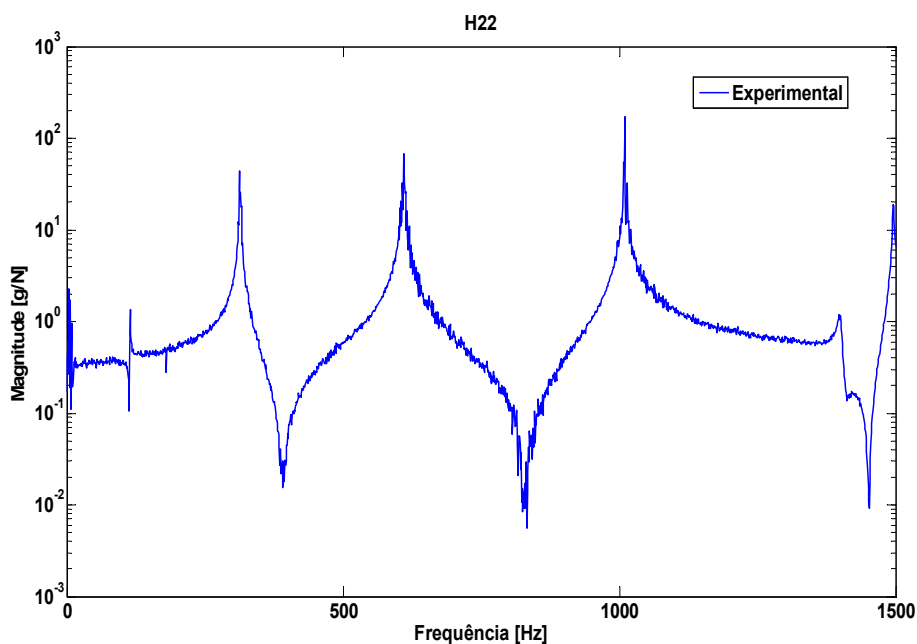


Figura 8: Função de Resposta em Frequência (H22) experimental

A Figura 9 apresenta o gráfico da Função de Resposta em Frequência H22 obtida através do modelo teórico, simulando a condição de ensaio em que a viga é excitada no ponto 2 e a resposta é medida no ponto 2.

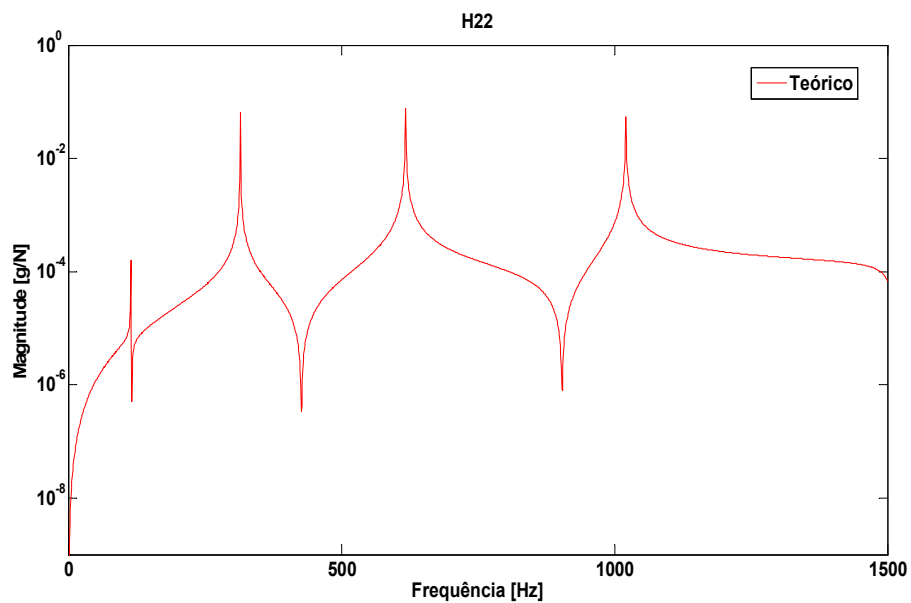


Figura 9: Função de Resposta em Frequência (H22) teórica

A Figura 10 apresenta a comparação entre os resultados obtidos teoricamente e experimentalmente. Analisando-se qualitativamente a Figura 10 observa-se que o modelo teórico apresenta uma boa concordância com o resultado experimental, uma vez que, as frequências dos picos estão bem próximas.

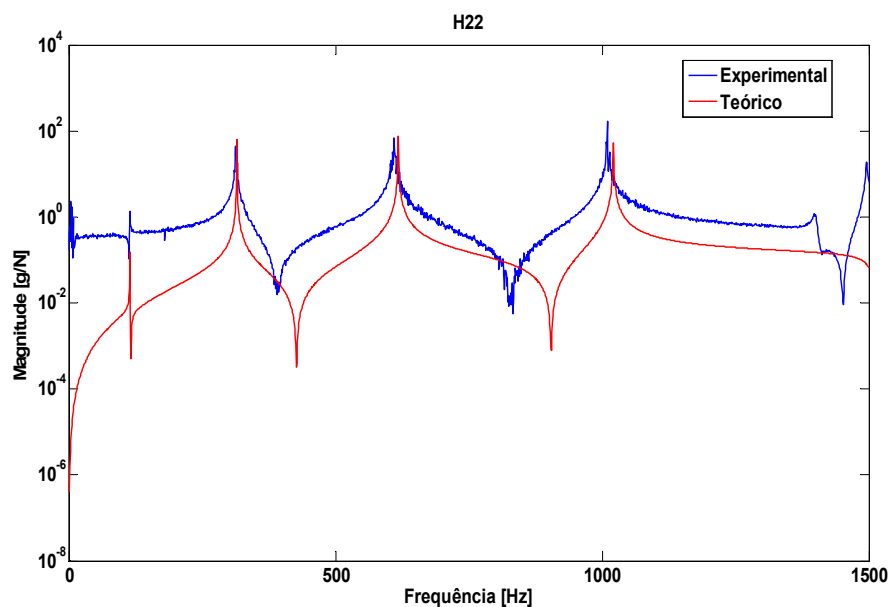


Figura 10: Comparação entre H22 teórico e H22 experimental

A Tabela 3 apresenta os valores das frequências de pico, f_p , presentes nas FRF H22 teórica e experimental e o erro de estimação do modelo teórico.

Tabela 3: Comparação entre as frequências de pico para H22.

f_p Experimental [Hz]	f_p Teórica [Hz]	Erro [%]
114,4	114,4	
312,2	315	0,89
609,4	617,8	1,37
1010	1021	1,08

A Figura 11 apresenta o gráfico da Função de Resposta em Frequência H33 obtida experimentalmente na condição de ensaio em que a viga é excitada no ponto 3 e a resposta é medida no ponto 3.

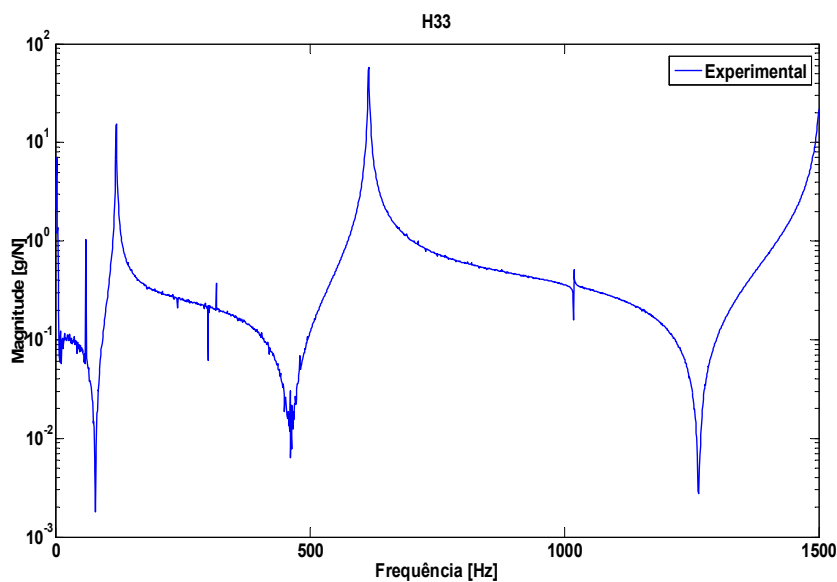


Figura 11: Função de Resposta em Frequência (H33) experimental

A Figura 12 apresenta o gráfico da Função de Resposta em Frequência H33 obtida através do modelo teórico, simulando a condição de ensaio em que a viga é excitada no ponto 3 e a resposta é medida no ponto 3.

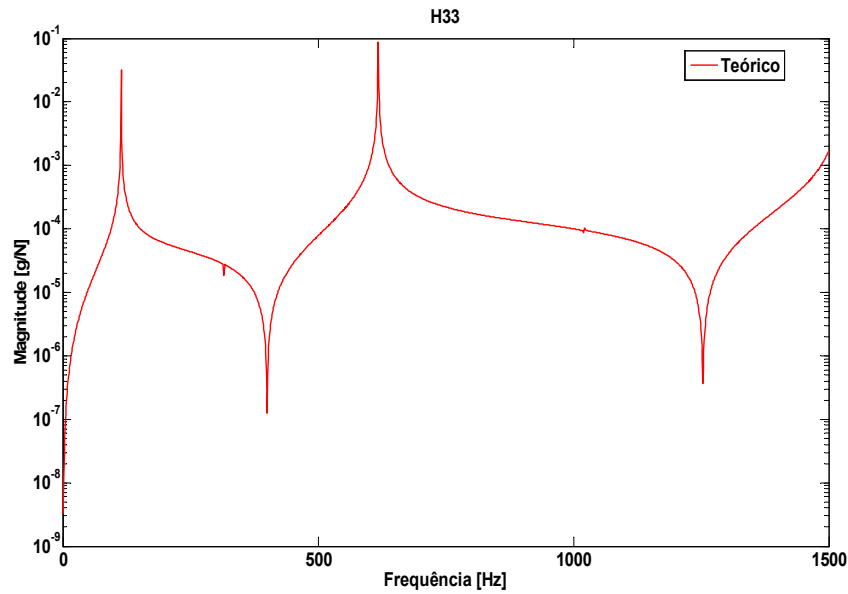


Figura 12: Função de Resposta em Frequência (H33) teórico

A Figura 13 apresenta a comparação entre os resultados obtidos teoricamente e experimentalmente. Analisando-se qualitativamente a Figura 10 observa-se que o modelo teórico apresenta uma boa concordância com o resultado experimental, uma vez que, as frequências dos picos estão bem próximas.

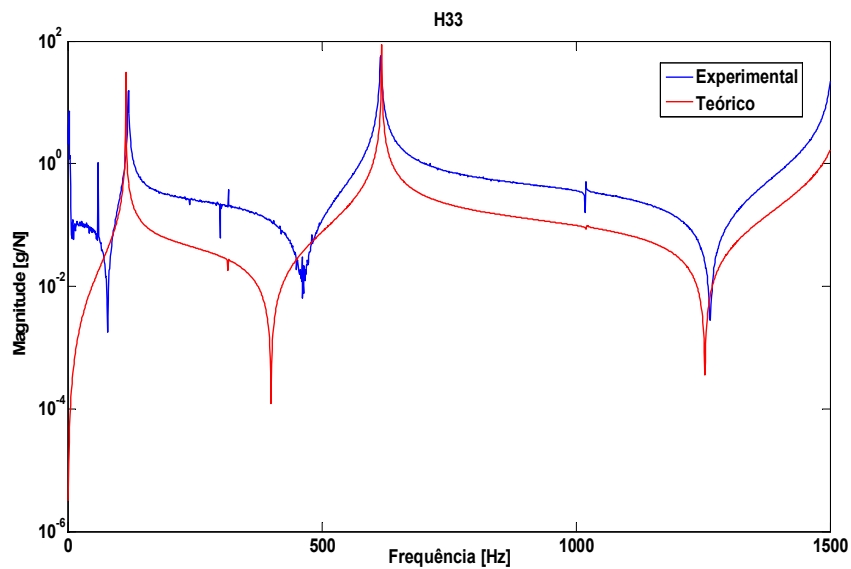


Figura 13: Comparação entre H33 teórico e H33experimental

A Tabela 4 apresenta os valores das frequências de pico, f_p , presentes nas FRF H33 teórica e experimental e o erro de estimação do modelo teórico.

Tabela 4: Comparação entre as frequências de pico para H33.

f_p Experimental [Hz]	f_p Teórica [Hz]	Erro [%]
119,1	114,4	4,1
615,9	617,8	0,3

5 CONCLUSÕES

A escolha de um modelo de viga livre-livre teve como objetivo identificar os modos naturais de vibração da viga, propiciando um bom resultado conforme apresentado no desenvolvimento teórico. Com o estudo da vibração livre obteve-se as frequências naturais que quando comparadas com os resultados experimentais obteve-se valores próximos. Com um estudo mais detalhado, incluindo a vibração forçada, foi possível obter as respostas em frequências do sistema. Desta forma, o modelo utilizado foi eficaz quando comparamos os resultados teóricos com os valores obtidos experimentalmente.

6 REFERÊNCIAS

- Craig, R.R. (1981). **Structural Dynamics**. New York: John Wiley & Sons.
- Inman, D.J. (1996). **Engineering Vibration**. New Jersey: Prentice Hall.
- McConnell, K.G.; Varoto, P.S. (2009). **Vibration Testing**. 2ed. New York: John Wiley & Sons.